

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI****15.02.2025****Clasa a X-a****Subiectul I (7 puncte)**Fie  $a, b, c \in (1, \infty)$ . Să se arate că:

$$\frac{\log_a b}{c} + \frac{\log_b c}{a} + \frac{\log_c a}{b} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

**Subiectul II (7 puncte)**

Arătați că:

$$\frac{{}^{2024}\sqrt{4} + {}^{2024}\sqrt{9} + {}^{2024}\sqrt{16}}{{}^{2024}\sqrt{6} + {}^{2024}\sqrt{8} + {}^{2024}\sqrt{12}} > \frac{{}^{2025}\sqrt{6} + {}^{2025}\sqrt{8} + {}^{2025}\sqrt{12}}{{}^{2025}\sqrt{4} + {}^{2025}\sqrt{9} + {}^{2025}\sqrt{16}}$$

**Subiectul III (7 puncte)**Fie  $z \in \mathbb{C}$  astfel încât  $|z| = 1$  și  $\bar{z} + z = 1$ . Calculați  $z^{2025} + \frac{1}{z^{2025}}$ .**Subiectul IV (7 puncte)**Demonstrați că nu există funcții injective  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu proprietatea:

$$f(2023^x) + f(2025^x) = 2024, (\forall)x \in \mathbb{R}$$

(Supliment Gazeta Matematică)

**Notă:**

- Timp de lucru 3 ore;
- Toate subiectele sunt obligatorii.